

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ. (Α' ΟΜΑΔΑ)

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 3 Μαΐου 2015

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, όπου Δ διάστημα του $\mathbb{R}$. Αν υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $F: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε: $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η F λέγεται παράγουσα συνάρτηση της f στο διάστημα Δ .

A2.

1. Σ
2. Λ
3. Λ
4. Σ
5. Σ

A3.

1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \ell_1 + \ell_2$.

2. Αν $x > 0$, τότε $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

3. Αν $\alpha < \beta$ και $c =$ πραγματικός αριθμός, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = c \cdot (\beta - \alpha)$.

4. $CV = \frac{S}{x} \cdot 100\%$.

5. $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{g'(x)}{g^2(x)} dx = \left[-\frac{1}{g(x)} \right]_{\alpha}^{\beta}$.

ΘΕΜΑ Β

B1.

Αριθμός ωρών x_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Συχνότητα v_i	K_i	$K_i \cdot v_i$	$(\bar{x} - x_i)^2$	$v_i (\bar{x} - x_i)^2$
[0,2)	10	4	1	4	25	100
[2,4)	20	8	3	24	9	72
[4,6)	15	6	5	30	1	6
[6,8)	20	8	7	56	1	8
[8,10)	35	14	9	126	9	126
ΣΥΝΟΛΑ	100	40		240		312

$$f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% + f_5\% = 100 \Leftrightarrow 10 + 20 + f_3\% + 20 + 35 = 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f_3\% = 100 - 10 - 20 - 20 - 35 \Leftrightarrow f_3\% = 15$$

$$v_1 = f_1 \cdot v = 0,10 \cdot 40 = 4, v_2 = f_2 \cdot v = 0,20 \cdot 40 = 8, v_3 = f_3 \cdot v = 0,15 \cdot 40 = 6$$

$$v_4 = f_4 \cdot v = 0,20 \cdot 40 = 8, v_5 = f_5 \cdot v = 0,35 \cdot 40 = 14$$

B2. $\bar{x} = \frac{240}{40} = 6$

B3. $s^2 = \frac{312}{40} = 7,8$

B4. $\bar{x}_{ολ} = \frac{240 + 8 \cdot 60}{40 + 60} = \frac{240 + 480}{100} = \frac{720}{100} = 7,2$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3 - 3\sqrt{x}}{2x^2 - x - 1} = \dots = \frac{0}{0}$ (Απροσδιόριστη Μορφή)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(3 - 3\sqrt{x})(3 + 3\sqrt{x})}{2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)(3 + 3\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3^2 - (3\sqrt{x})^2}{2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)(3 + 3\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{9 - 9x}{2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)(3 + 3\sqrt{x})} =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-9(x-1)}{2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)(3+3\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-9}{2\left(x + \frac{1}{2}\right)(3+3\sqrt{x})} = \\ &= \frac{-9}{2\left(1 + \frac{1}{2}\right)(3+3\sqrt{1})} = \frac{-9}{(2+1)6} = \frac{-9}{18} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$2x^2 - x - 1 = 2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$, αφού η εξίσωση $2x^2 - x - 1 = 0$ έχει ρίζες

$x = 1, x = -\frac{1}{2}$

Γ2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[-\frac{1}{2}e^{x-1} + \ln(2-x) \right] = -\frac{1}{2}e^{1-1} + \ln(2-1) = -\frac{1}{2}e^0 + \ln 1 = -\frac{1}{2}$

Γ3. Αφού η f είναι συνεχής στο $x=1$, θα ισχύει:

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \quad (I)$

$(I) \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa^2 - \kappa - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa^2 - \kappa - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \kappa^2 - \kappa = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \kappa(\kappa - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \kappa = 0 \\ \kappa - 1 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1 \end{cases}$

Γ4. Από τον 3^ο κλάδο (για $x < 1$) θα υπολογίσουμε την παράγωγο:

$f'(x) = -\frac{1}{2}(e^{x-1})' + [\ln(2-x)]' = -\frac{1}{2}e^{x-1}(x-1)' + \frac{1}{2-x}(2-x)' =$

$= -\frac{1}{2}e^{x-1} \cdot 1 + \frac{1}{2-x} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}e^{x-1} - \frac{1}{2-x}$

$f'(-1) = -\frac{1}{2}e^{-1-1} - \frac{1}{2-(-1)} = -\frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2+1} = -\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{3}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$f'(x) = \alpha \frac{(e^x)' \cdot (x^2 + 2) - e^x \cdot (x^2 + 2)'}{(x^2 + 2)^2} = \alpha \frac{e^x \cdot (x^2 + 2) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} = \alpha \frac{e^x \cdot (x^2 - 2x + 2)}{(x^2 + 2)^2}$

$f'(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha \frac{e^0 \cdot (0^2 - 2 \cdot 0 + 2)}{(0^2 + 2)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha \frac{1 \cdot 2}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 1$

Δ2. Παρατηρούμε ότι $f'(x) = \frac{e^x \cdot (x^2 - 2x + 2)}{(x^2 + 2)^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $e^x > 0$

και $x^2 - 2x + 2 > 0$ (για την εξίσωση, έχουμε $\Delta = -4 < 0$). Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

Δ3. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, θα είναι και γνησίως αύξουσα στο $[e, \pi]$. Επειδή $e < \pi \Rightarrow f(e) < f(\pi)$.

Δ4. $g(x) = (x-1)(x^2+2) \frac{e^x}{x^2+2} \Leftrightarrow g(x) = (x-1)e^x$

Το εμβαδόν θα δίνεται από τον τύπο $E = \int_0^1 |g(x)| dx$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)e^x = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Η παράσταση $x-1 < 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, $e^x > 0$ πάντα.

Άρα $g(x) < 0$ στο $[0, 1]$.

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 |g(x)| dx = - \int_0^1 (x-1)e^x dx = - \int_0^1 (x-1)(e^x)' dx = - \left[(x-1)e^x \right]_0^1 + \int_0^1 (x-1)' e^x dx = \\ &= - \left[(1-1)e^1 - (0-1)e^0 \right] + \int_0^1 e^x dx = - (0+1) + \left[e^x \right]_0^1 = -1 + e^1 - e^0 = -1 + e - 1 = e - 2 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$